JOURNAL OF NUMBER THEORY 39, 129–143 (1991)

Nachruf

Theodor Schneider
(1911–1988)

PETER BUNDSCHUH

Mathematisches Institut der Universität zu Köln, Weyertal 86–90, D-5000 Köln 41, Germany

UND

HANS ZASSENHAUS

Department of Mathematics, The Ohio State University, 231 West 18th Avenue, Columbus, Ohio 43210-1174

0. HILBERTS SIEBTES PROBLEM

Unter dem Titel "Mathematische Probleme" hielt D. Hilbert auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß 1900 in Paris seinen inzwischen berühmt gewordenen Vortrag. Dort formulierte er insbesondere 23 seinerzeit offene Fragestellungen explizit, die die ganze damalige Mathematik umspannten und die er als Schlüsselprobleme für weitere Fortschritte in den einzelnen mathematischen Teildisziplinen erachtete.

Unter der Überschrift "Irrationalität und Transzendenz bestimmter Zahlen" führte Hilbert nach einem kurzen Hinweis auf die arithmetischen Sätze von C. Hermite und F. Lindemann über die Exponentialfunktion als siebtes Problem folgendes an. "... halte ich doch den Beweis dieses Satzes für äußerst schwierig, ebenso wie etwa den Nachweis dafür, daß die Potenz α^{β} für eine algebraische Basis α und einen algebraisch irrationalen Exponenten β, z.B. die Zahl $2^{\sqrt{2}}$ oder $e^{\pi} = i^{-2i}$, stets eine transzendente oder auch nur eine irrationale Zahl darstellt. Es ist gewiß, daß die Lösung dieser oder ähnlicher Probleme uns zu ganz neuen Methoden ... führen muß."

Theodor Schneider hat dieses siebte Hilbertsche Problem 1934 als junger Student im achten Semester, gerade 23 Jahre alt geworden, vollständig gelöst. Seine dazu entwickelte Schlußweise konnte in der Folgezeit erheblich ausgebaut werden zu dem, was man heute als "Schneiders

0022-314X/91 $3.00

Methode" bezeichnet, eine der wenigen allgemeineren analytischen Methoden für Transzendenz.

Im folgenden wollen wir zunächst die wichtigsten Stationen im Leben des Wissenschaftlers Theodor Schneider schildern. Daran anschließend gehen wir kurz auf seine mathematischen Beiträge ein, geordnet nach den drei zahlentheoretischen Teilgebieten, denen Schneiders Hauptinteresse galt: Analytische Transzendenzmethoden, Approximation algebraischer Zahlen und Geometrie der Zahlen. Zum Schluß wollen wir versuchen, den Einfluß von Schneiders Werk auf die spätere Entwicklung zu skizzieren, soweit dies heute möglich ist.

1. Schneiders Vita

Theodor Schneider wurde am 7. Mai 1911 in Frankfurt am Main geboren. Dort besuchte er das naturwissenschaftlich augerichtete Helmholtz-Gymnasium und parallel dazu nahm er jahrelang Unterrricht im Klavierspiel, wo er es bis zur Aufnahme in die Meisterklasse eines Frankfurter Konservatoriums brachte. Die Entscheidung, ob er nach seinem Abitur 1929 eine Ausbildung zum Konzertpianisten oder ein Studium der Mathematik und Naturwissenschaften beginnen sollte, war ihm nicht leicht gefallen.

Schließlich nahm Schneider zum Sommersemester 1929 an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt sein Studium der Mathematik, Physik, und Chemie auf. Bald fühlte er sich immer stärker zur Mathematik hingezogen, die damals in Frankfurt mit den Professoren M. Dehn, E. Hellinger, und C. L. Siegel und den Dozenten P. Epstein und O. Szasz hervorragend besetzt war.

In seinen letzten Studiensemestern machte Schneider dann die Begegnung, die über seine weitere wissenschaftliche Laufbahn entschied. Damals besuchte er hauptsächlich die Seminare von Carl Ludwig Siegel, die seinerzeit vor allem Transzendenzuntersuchungen gewidmet waren. Siegel erkannte sofort Schneiders mathematische Begabung und legte ihm nahe, eine Dissertation zu schreiben. Daß Siegel außerordentlich hohe Ansprüche an seine Doktoranden stellte, hat Schneider selbst im Nachruf[1] [27] auf seinen Lehrer geschildert, wo er diesen so zitiert: "Sie sind der elfte, der bei mir eine Dissertation begonnen und der fünfte, der eine solche vollendet hat."

[1] Die Zitate in eckigen Klammern beziehen sich im folgenden auf Schneiders Schriftenverzeichnis am Ende des Nachrufs von L.-C. Kappe, H. P. Schlickewei, und W. Schwarz: Theodor Schneider zum Gedächtnis, der demnächst erscheint im *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. Diesem Nachruf ist übrigens auch die Liste der neun Doktoranden von Schneider angefügt, von denen heute sieben Universitätsprofessuren innehaben.

Daß Schneider diese Erwartungen erfüllen konnte, zeigte sich daran, daß ihm bereits seine erste wissenschaftliche Arbeit, eben seine Dissertation, einen Ehrenplatz in der Gemeinschaft der Mathematiker sicherte. Siegel hatte Schneider zehn Dissertationsthemen vorgeschlagen, aber Schneider wählte selbst ein Thema "das mir aus dem Seminar im siebten Semester interessant zu sein schien und das von Siegel nicht gestellt war. Ich lieferte nach wenigen Monaten eine Arbeit von sechs Seiten ab und erfuhr dann von Siegel, daß diese die Lösung des siebten Hilbertschen Problems enthielt".

Diese Arbeit wurde am 28. Mai 1934 beim Journal für die Reine und Angewandte Mathematik eingereicht und dort auf fünf Seiten in Band 172 publiziert (vgl. [1]). Als Fußnote fügte Schneider an: "Am Tage der Einreichung des Manuskripts erfuhr ich, daß der im folgenden bewiesene Satz ebenfalls von A. Gel'fond gefunden und eine Skizze des Beweises bereits am 1. April 1934 veröffentlicht wurde (...). Der Gel'fondsche Beweis unterscheidet sich aber von dem meinigen in vielen Punkten wesentlich."

Es sei erwähnt, daß Siegel wegen der Kürze der Schneiderschen Lösung des siebten Hilbertschen Problems vorschlug, die Dissertation mit einer weiteren Anwendung der Methode anzureichern, um Schwierigkeiten mit der Frankfurter Naturwissenschaftlichen Fakultät zu vermeiden. Diese "Ergänzung" ging zwei Monate nach [1] bei deselben Zeischrift ein und ist als [2] veröffentlicht. Sie beinhaltet Transzendenzergebnisse über elliptische Funktionen, die wie die Exponentialfunktion ein einfaches algebraisches Additionstheorem besitzen.

Trotz seiner bahnbrechenden Dissertation und trotz der überragenden Persönlichkeit seines Lehrers Siegel hatte Schneider zunächst Schwierigkeiten in seiner weiteren beruflichen Laufbahn. Zwar erhielt Schneider die einzige Assistentenstelle des damaligen Frankfurther Mathematischen Semiars, die er bis 1939 innehatte, es wurde ihm jedoch nicht gestattet, über seine Lösung des siebten Hilbertschen Problems auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß 1936 in Oslo vorzutragen. Er hatte einerseits in der Mathematik Großes geleistet, galt andererseits aber als politisch unzuverlässig, da er sich nicht für die Ideologie des "Dritten Reiches" engagieren wollte.

Dieses mangelnde Engagement könnte ihm ein weiteres Mal 1938 erhablich geschadet haben. Damals wurde ihm nämlich die Annahme der fertig vorliegenden, später als [6] veröffentlichten Habilitationsschrift vom Dekan der Frankfurter Naturwissenschaftlichen Fakultät ohne inhaltliche Prüfung verweigert. Es blieb Schneider nichts anderes übrig, als nach Göttingen zu gehen, wohin sein Lehrer Siegel schon 1938 gewechselt war. Dort habilitierte er sich dann 1939 mit der in Frankfurt nich angenommenen Arbeit.

Der Kriegsdienst von 1940 bis 1945, den Schneider als Meteorologe in

Frankreich verbrachte, riß ihn aus einer fruchtbaren Periode wissenschaftlicher Forschung.

Im Herbst 1945 ging Schneider an die Universität Göttingen zurück, zunächst als planmäßiger Assistent, später als Oberassistent und schließlich als Dozent. Zwischendurch vertrat er im akademischen Jahr 1947/48 einen Lehrstuhl an der Universität Münster.

In seine Göttinger Zeit fiel auch die Heirat mit seiner Frau Maria, geborene Urbach, im Jahre 1950. Seine Frau, die er stets liebevoll Mieke nannte, war mir ihrem Temperament eine glückliche Ergänzung seiner eher ruhigen Art. Das einzige Kind aus der Ehe, ein Sohn, studierte Medizin und ist heute als Arzt tätig.

Im Jahre 1953 folgte Schneider dann einem Ruf auf ein Ordinariat an der Universität Erlangen als Nachfolger von O. Haupt. In der Erlanger Zeit enstand seine Monographie "Einführung in die transzendenten Zahlen" [19], die 1957 erschien und schon zwei Jahre später ins Französische [20] übersetzt wurde. Zwischenzeitlich lehnte Schneider einen Ruf an die Freie Universität Berlin ab, nahm aber 1959 den Ruf an die Universität Freiburg im Breisgau als Nachfolger des verstorbenen W. Süß as. Süß hatte 1944 das heute in der ganzen Fachwelt bekannte Mathematische Forschungsinstitut in Oberwolfach gegründet und bis zu seinem Tode geleitet. Gleichzeitig mit der Freiburger Professur übernahm Schneider die Leitung des Oberwolfacher Instituts, die er bis 1963 innehatte. In dieser für das Institut schwierigen Zeit konnte er dessen Bestand sichern und die Voraussetzungen für den erheblichen Ausbau schaffen, den sein Nachfolger M. Barner später durchführte.

Am Oberwolfacher Institut hielt Schneider seit 1955 regelmäßig Tagungen über "Zahlentheorie" ab, die letzte unter diesem Titel im Jahre 1972. Der raschen Entwicklung des Fachs Rechnung tragend, wurde diese Tagung nach 1972 aufgespalten in eine über "Elementare und Analytische Zahlentheorie" und eine zweite über "Diophantische Approximationen." Die letztere organisierte Schneider von 1974 bis 1981.

Schneider hat im In- und Ausland zahlreiche Einladungen erhalten und Ehrungen erfahren. So hielt er sich 1969 mehrere Monate lang am Tata Institute of Fundamental Research im Bombay auf. Weiter war er korrespondierendes Mitglied der Math. Phys. Klasse der Adademie der Wissenschaften in Göttingen und korrespondierendes Mitglied der österreichischen Akademie der Wissenschaften in Wien.

Auch der akademischen Selbstverwaltung versagte sich Schneider nicht. So bekleidete er in Erlangen und in Freiburg, insgesamt dreimal, das Amt des Dekans der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät. In der für die deutschen Universitäten unruhigen Zeit Ende der 60er und Anfang der 70er Jahre hat er in vielen Gremien mitgeholfen, die Regularien den Erfordernissen der Zeit so anzupassen, daß sich die Wissenschaft an seiner

Universität relativ ungestört weiterentwickeln konnte. Andererseits haben diese Jahre doch tiefe Spure bei ihm hinterlassen: Skeptisch gegenüber manchen Neuerungen und bisweilen enttäuscht von den Veränderungen des akademischen Lebens ließ er sich 1976 zum frühestmöglichen Zeitpunkt emeritieren.

Danach zog sich Schneider, bedingt auch durch seinen schwankenden Gesundheitszustand, mehr und mehr zurück, genoß seine Freiheit von dienstlichen Pflichten und freute sich über private Reisen sowie sein schönes Haus mit dem großen Garten oberhalb von Freiburg. Trotz seiner zuletzt sehr angegriffenen Gesundheit kam sein Tod ganz unerwartet am 31. Oktober 1988.

Mit Theodor Schneider hat die Fachwelt nicht nur einen bedeutenden Gelehrten, sondern auch eine liebenswürdige Persönlichkeit verloren und viele jüngere Kollegen einen zuverlässigen väterlichen Freund.

2. Analytische Transzendenzmethoden

Wir skizzieren zunächst Schneiders Lösung des siebten Hilbertschen Problems in [1], also einen Beweis der folgenden Aussage, für die sich die Bezeichnung *Satz von Gel'fond-Schneider* eingebürgert hat: Sei $\alpha \in \mathbb{C}^\times$, $\log \alpha \neq 0$ (log eine beliebige Bestimmung des komplexen Logarithmus) und $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. Dann sind nicht all Zahlen α, β, $\alpha^\beta := e^{\beta \log \alpha}$ algebraisch.

Der Beweis verläuft indirekt. Man nimmt an, unter den über α und β gemachten Voraussetzungen seien $\alpha, \beta, \alpha^\beta$ algebraisch, und definiert den algebraischen Zahlkörper $K := \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \alpha^\beta)$. Nun baut man mittels eines Schubfachschlusses ein Polynom

$$P = \sum_{\lambda_1 < L_1} \sum_{\lambda_2 < L_2} p(\lambda_1, \lambda_2) X_1^{\lambda_1} X_2^{\lambda_2} \in \mathbb{Z}[X_1, X_2] \setminus \{0\},$$

so daß $F(z) := P(z, \alpha^z)$ an allen N^2 Stellen $u + \beta v$ mit $u, v \in \{0, ..., N-1\}$ Nullstellen besitzt, wobei die Koeffizienten $p(\lambda_1, \lambda_2)$ in Abhängigkeit des natürlichen Parameters N "nicht zu groß" sind. Da die Funktionen z und α^z sogar über $\mathbb{C}$ algebraisch unabhängig sind, verschwindet F nicht identisch.

Ein funktionentheoretischer Satz, der die Wachstumsordnung von F, also $\rho(F) := \limsup_{r \to \infty} \log \log M(r, F)/\log r$, $M(r, F) := \max_{|z|=r} |F(z)|$, mit ihrer Nullstellenanzahl in "großen" Kreise um 0 in Verbindung bringt, gestattet nun zu schließen, daß F nicht an allen Stellen $u + \beta v$, $(u, v) \in \mathbb{N}_0^2$, verschwinden kann. Somit hat man die Existenz eines kleinsten natürlichen $M > N$, so daß F zwar an allen Stellen $u + \beta v$ mit $u, v \in \{0, ..., M-1\}$ verschwindet, daß es jedoch ein $(u_0, v_0) \in \mathbb{N}_0^2$ mit $\max(u_0, v_0) = M$ und $F(u_0 + \beta v_0) \neq 0$ gibt. Diese Zahl $F(u_0 + \beta v_0)$ ist aus $K^\times$.

Setzt man nun L_1, L_2 in Abhängigkeit von N geeignet fest, so liefert ein einfaches "Liouville-Argument," daß $|F(u_0+\beta v_0)|$ in Abhängigkeit von M nicht "zu klein" sein kann. Andererseits erweist sich $|F(u_0+\beta v_0)|$ als "sehr klein," da F die "vielen" Nullstellen $u+\beta v$ mit $u, v \in \{0, ..., M-1\}$ hat. Da sich die beiden für $|F(u_0+\beta v_0)|$ erhaltenen Schranken für genügend großes M widersprechen, ist die Behauptung bewiesen.

In der Passage, in der wir oben die nichtverschwindende Zahl mit Hilfe des angedeuteten funktionentheoretischen Satzes konstruiert haben, stützt sich Schneider in [1] auf ein direkteres Argument über eine Vandermonde-Determinante. Diese Vorgehensweise ist auf die Exponentialfunktion zugeschnitten und läßt sich nicht so gut verallgemeinern.

Die Idee, den Schubfachschluß in die analytische Transzendenztheorie einzubringen, geht auf Siegels berühmte 70-seitige Arbeit in den Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften aus dem Jahr 1929 zurück.

Übrigens bediente sich auch Gel'fond dieser Idee bei seiner Lösung des siebten Hilbert-Problems: Er konstruierte jedoch sein P, so daß $F(z) := P(e^z, e^{\beta z})$ an allen Stellen $u \log \alpha$, $u \in \{0, ..., U-1\}$, Nullstellen N-ter Ordnung hat, wobei U geeignet zu wählen ist. Da F wieder nicht identisch verschwindet, gibt es ein kleinstes $M \geqslant N$, so daß nicht alle Zahlen $F^{(M)}(u \log \alpha)$, $u \in \{0, ..., U-1\}$, verschwinden. Damit hat man ein $F^{(M)}(u_0 \log \alpha) \in K^\times$ gefunden, dessen Betrag man nun ähnlich wie bei Schneider nach oben und unten abschätzt.

Bei Gel'fond gestaltet sich zwar die Konstruktion der abzuschätzenden Zahl aus $K^\times$ einfacher als bei Schneider. Dafür benötigt Schneider offenbar nur das Additionstheorem der Exponentialfunktion, während Gel'fond außerdem noch deren Differentialgleichung heranziehen muß.

Seine oben skizzierte Method hat Schneider im zweiten Teil seiner Dissertation [2] erneut angewandt, um zu zeigen: Sind ω_1, ω_2 primitive Perioden der Weierstraßschen $\wp$-Funktion mit den Invarianten g_2, g_3 und sind 1, β, ω_2/ω_1 über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig, so ist mindestens eine der fünf Zahlen g_2, g_3, ω_2/ω_1, β, $\wp(\beta\omega_1)$ transzendent.

Während Schneider hier wieder "seine" Methode verwendet, sich also nur auf das Additionstheorem von $\wp$ stützt, greift er in [3] erstmals auf Gel'fonds Methode zurück, um unter zusätzlicher Ausnutzung auch der Differentialgleichung von $\wp$ eine Reihe schöner Resultate über $\wp$ und die Weierstraßsche ζ-Funktion zu beweisen. Wir erwähnen als. Beispiel: Ist $\beta \in \mathbb{C}$ nicht Pol von $\wp$ und sind nicht beide $a, b \in \mathbb{C}$ gleich Null, so ist mindestens eine der sechs Zahlen g_2, g_3, a, b, $\wp(\beta)$, $a\beta + b\zeta(\beta)$ transzendent. Insbesondere sind bei algebraischen g_2, g_3 nicht beide Zahlen β, $\wp(\beta)$ algebraisch. Letzteres ist das elliptische Analogon des Satzes von Hermite-Lindemann und beinhaltet die Transzendenz aller Perioden von $\wp$ bei algebraischen Invarianten.

Schneider hat in seiner Habitationsschrift [6] erstmalig Funktionen mehrerer Variablen auf Transzendenz untersucht. Z. B. bewies er dort, daß die Perioden eines Abelschen Integrals erster oder zweiter Gattung, dessen Integral als algebraische Funktion nur algebraische Koeffizienten besitzt, nicht sämtlich algebraisch sind. Was das arithmetisch-algebraische Verfahren angeht, war der Beweis schon in [3] vorbereitet; als funktionentheoretisches Hilfsmittel wird nun der mehrdimensionale Cauchysche Integralsatz herangezogen.

Die bisherigen Bemerkungen haben gezeigt, daß sowohl Schneider als auch Gel'fond bei ihren Lösungen des siebten Hilbertschen Problems unterschiedliche Methoden angewandt haben, die beide in der Folgezeit zu weiteren Transzendenzergebnissen geführt haben. Den ersten Versuch, einen allgemeinen Satz herauszupräparieren, der möglichst viele, mit der Gel'fondschen(!) Methode beweisbaren Resultate umfaßt, wurde von Schneider 1948 in [8] unternommen und später im zweiten Kapitel seiner Monographie [19] ausführlich dargestellt. Die Hauptaussage in [8] ist ein Satz, der zeigt, daß gewisse Algebraizitätsannahmen über zwei meromorphe Funktionen und ihre Ableitungen an geeigneten Stellen die Summe der Wachstumsordnungen dieser Funktionen nichttrivial nach unten beschränken, falls die beiden Functionen über $\mathbb{Q}$ algebraisch unabhängig sind.

Die Arbeiten [12, 18] haben mehr didaktischen Charakter. In [12] schließt Schneider an [8] an und führt einen einheitlichen Transzendenzbeweis für e und π vor. In [18] zeigt er die Irrationalität von π, indem er die Exponentialfunktion nach geeigneten Stellen in eine Newtonsche Interpolationsreihe entwickelt und auf diesem Wege beweist: Für $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ können α und e^α nicht gleichzeitig zum Gaußschen Zahlkörper $\mathbb{Q}(i)$ gehören. Die Interpolationsreihenmethode hat Schneider übrigens oft und gerne angewandt.

In den Arbeiten [15–17, 23–25] werden algebraische Funktionen f in verschiedener Hinsicht arithmetisch untersucht. Z.B. zeigt Schneider in [15] notwendige und hinreichende Kriterien dafür, daß eine analytische Funktion algebraisch bew. rational ist. In allen sechs Arbeiten ist erneut die Gel'fondsche Transzendenzmethode das Beweishilfsmittel: Jedesmal konstruiert man ein $P \in \mathbb{Z}[X_1, X_2] \backslash \{0\}$ wie oben, mit dem man dann $F(z) := P(z, f(z))$ arithmetisch und analytisch weiterbehandelt.

3. Diophantische Approximationen, Geometrie der Zahlen

Schneider hat sich auch immer wieder intensiv mit dem Problemkreis der Approximation algebraischer Zahlen durch rationale befaßt. Hierher gehören die Arbeiten [4, 21].

Um die mittleren drei dieser fünf Arbeiten einheitlich zu beschreiben, sei α eine reelle algebraische Irrationalzahl und $\kappa \in \mathbb{R}_+$. Man interessiert sich für die Lösungen $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ mit $q > 0$ der Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant q^{-\kappa}, \tag{*}$$

eine Frage, zu der vor 1936 die wichtigsten Beiträge von J. Liouville (1844), A. Thue (1909), und C. L. Siegel (1921) geleistet worden waren.

An diese Autoren schloß Schneider [5] an, indem er zeigte: Hat (*) bei $\kappa > 2$ unendlich viele verschiedene, gekürzte Lösungen $p_n q_n$ mit $2 \leqslant q_1 \leqslant q_2 \leqslant ...$, so gilt die "Seltenheitsrelation" $\limsup_{n\to\infty} q_{n+1}/q_n = \infty$. Daß (*) bei $\kappa > 2$ überhaupt nur endlich viele Lösungen haben kann, konnte erst fast 20 Jahre später von K. F. Roth bewiesen werden. Roth verwandte dabei unter anderem einen Hifssatz von Schneider über die Anzahl der Gitterpunkte in einem Abschnitt eines Würfels im $\mathbb{R}^k$, auf welchen sich auch Schneider in [5] wesentlich gestützt hatte.

Seine Überlegungen aus [5] wandte Schneider selbst noch zweimal an. In [13] zeigte er damit folgendes: Ist M eine feste, nichtleere, endliche Menge von Primzahlen und hat (*) bei $\kappa > \sigma + \tau$ unendlich viele Lösungen p_n/q_n wie oben, wobei die Zerlegungen $p_n = p'_n p''_n$, $q_n = q'_n q''_n$ gelten, sämtliche Primfaktoren von p''_n, q''_n zu M gehören und $\sigma := \limsup_{n\to\infty} (\log p'_n / \log p_n)$, $\tau := \limsup_{n\to\infty} (\log q'_n / \log q_n)$ gesetzt ist, so gilt die obige "Seltenheitsrelation". In [7] hatte Schneider den Beweis eines Satzes von F. J. Dyson aus dem Jahre 1947 sehr vereinfacht, den man als letzten wesentlichen Vorläufer des Rothschen Approximationssatzes bezeichnen könnte: Ist $\kappa > \sqrt{2d}$, d der Grad von α, so hat (*) nur endlich viele Lösungen.

Alle Ergebnisse zu (*) ließen sich anwenden, um die Transzendenz reeller Zahlen nachzuweisen, die durch genügend rasch konvergente Grenzprozesse, etwa durch Reihen, definiert sind. Schneider hat dies da und dort durchgeführt. In [21] hat er 1967 außerdem mit Hilfe der Ridoutschen Verallgemeinerung des Rothschen Satzes eine interessante Anwendung auf diophantische Gleichungen gegeben.

Schneider hat in [22] einen neuen p-adischen Kettenbruchalgorithmus vorgestellt, dessen Approximationseigenschaften studiert und die erhaltenen Ergebnisse angewandt, um transzendente p-adische Zahlen zu konstruieren. Wann eine Zahl aus $\mathbb{Q}_p$ rational ist, konnte 1977 vom ersten Autoren mit Hilfe des Schneiderschen p-adischen Kettenbruchs charackterisiert werden. Eine entsprechende Charakterisierung der algebraischen Zahlen aus $\mathbb{Q}_p$ vom Grad zwei, also ein Analogon zum Satz von Euler–Lagrange, steht indes noch aus.

Auf die Schneiderschen Beiträge [9–11, 14] zur Geometrie der Zahlen wollen wir nur kurz eingehen. In [9] wird ein Resultat von E. Hlawka wie folgt verschärft: Seien $k_0, k_1, ..., k_n \in \mathbb{R}_+$, $k_0 \in \mathbb{Z}$, sei $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und Jordan-meßbar und sei $M(K)$ die Menge der Punkte $((x_1 - y_1)/k_1, ..., (x_n - y_n)/k_n)$ mit $(x_1, ..., x_n)$, $(y_1, ..., y_n) \in M$. Ist das Volumen von M mindestens gleich $\frac{1}{2}k_0 \cdots k_n$ und enthält $M(K)$ in seinem Inneren mindestens $k_0 - 1$ Paare symmetrischer Gitterpunkte, verschieden vom Ursprung, so gibt es zu jedem $r \in \mathbb{R}^n$ mindestens k_0 Gitterpunkte $g \in \mathbb{Z}^n$, für die $r + g \in M(K)$ gilt.

In [10] benützte Schneider sein Ergebnis aus [9], um bei der Minkowskischen Vermutung über inhomogene Linearformen ein Stück weiterzukommen zu folgendem bedingtem Resultat. Sind $L_1(x), ..., L_n(x)$ Linearformen mit Determinante 1 und ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig, so gibt es einen Gitterpunkt $g \in \mathbb{Z}^n$, für den $\prod_{\nu=1}^{n} |L_\nu(g + x_0)| \leqslant 2^{-n}$ gilt. Dies ist jedenfalls dann richtig, wenn es $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$ mit $t_1 \cdot \cdots \cdot t_n = 1$ gibt derart, daß in den Bereich $|L_1(x)| \leqslant t_1, ..., |L_n(x)| \leqslant t_n$, $\sum_{\nu=1}^{n} |L_\nu(x)|/t_\nu \leqslant n/2$ kein Gitterpunkt $x \neq 0$ fällt. In [11] schließlich beweist Schneider kurz und mit analytischen Methoden eine weitgehende Verallgemeinerung eines Resultats von H. F. Blichfeldt aus dem Jahre 1914.

4. Der Einfluss von Schneiders Werk

Abschließend wollen wir nun versuchen, den Einfluß des Werks von Theodor Schneider auf die Entwicklung der Theorie der transzendenten Zahlen und der diophantischen Approximationen so zu skizzieren, wie sich dies bis heute beurteilen läßt. Natürlich kommt in diesem Versuch die subjektive Meinung der Autoren stärker zum Audruck.

Wenn wir uns auf die beiden größten wissenschaftlichen Verdienste von Schneider konzentrieren, beurteilt nach der bisherigen Wirkung seiner Arbeiten auf die späteren Forscher, so scheinen uns seine analytische Transzendenzmethode sowie seine Monographie [19] besonders hervorzuheben zu sein.

Nach E. Maillets "Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions" von 1906, C. L. Siegels "Transcendental Numbers" von 1949 (in deutscher Übersetzung 1967) und A. O. Gel'fonds "Transcendental and Algebraic Numbers" von 1952 (in russischer Sprache; englische Übersetzung 1960) war Schneiders "Einführung in die transzendenten Zahlen" von 1957 eine der ersten zusammenfassenden Darstellungen dieses Gebiets. Im Zentralblatt für Mathematik kommentierte O. Perron diese Monographie wie folgt: "... Seitdem ist aber diese Materie durch zum Teil schwer zugängliche und schwer lesbare Arbeiten bedeutend erweitert und ausgebaut worden; es ist daher sehr zu begrüßen, daß einer der erfolgreichsten Bearbeiter daran gegangen ist, weitere Beiträge mit einer Gesamtbilanz über das bisher Erreichte zu verbinden und diese den Fachgenossen vorzulegen.... Zum Schluß kommt noch eine interessante und anregende Seite mit der Überschrift: Einige offene Fragen."

In Kapitel I seiner "Einführung" behandelt Schneider die in 3. schon angeschnittene Frage der Approximation algebraischer Zahlen durch rationale. Er stellt dort den Liouvilleschen und den erst zwei Jahre vor Erscheinen seiner Monographie bewiesenen Rothschen Approximationssatz dar, letzteren analog zu seiner Vorgehensweise in [13] verfeinert. Er gibt Anwendungen beider Sätze auf Transzendenz. Eine äußert wichtige Weiterentwicklung hat dieser Problemkreis 1970 erfahren, als W. M. Schmidt den Rothschen Satz zu Ergebnissen über simultane Approximation mehrerer algebraischer Zahlen ausgedehnt hat. Diese Verallgemeinerungen haben seither (wie früher der Thue–Siegel–Rothsche Satz) viele und bedeutende Anwendungen auf polynomiale diophantische Gleichungen erfahren.

In Kapitel II geht es um analytische Transzendenzmethoden. Begonnen wird mit der Interpolationsreihenmethode, mit der wie in [18] die Irrationalität von π bewiesen wird. Den Hauptteil nimmt seine schon in 2. erwähnte "Axiomatisierung" der Gel'fondschen Methode ein, aus der dann einheitlich die Sätze von Hermite–Lindemann, Gel'fond–Schneider sowie seine eigenen über elliptische Funktionen abgeleitet werden. Am Ende weist er auf seine Transzendenzresultate bei Funktionen mehrerer Variablen [6] hin und regt an, diese Untersuchungen fortzusetzen und zu vertiefen. Wichtige Beiträge in dieser Richtung wurden von S. Lang, M. Waldschmidt, E. Bombieri und anderen erzielt. Lang und Waldschmidt haben sich außerdem die Aufgabe gestellt, noch glattere, elegantere Axiomatisierungen der Gel'fondschen Methode zu finden.

Kapital III ist den Eigenschaften der Klasseneinteilungen der reellen und komplexen Zahlen nach K. Mahler bzw. nach J. F. Koksma sowie deren Zusammenhängen gewidmet. Die wichtigste Frage in diesem Zusammenhang, Problem 6 von Schneider [19, p. 138], nämlich die nach dem Maß aller S-Zahlen wurde 1964 von V. G. Sprindžuk vollständig gelöst. Sprindžuks diesbezügliche Monographie hat eine breite Entwicklung eingeleitet, die man mit dem Begriff "metrische Theorie der transzendenten Zahlen" beschreiben könnte. Eine andere, in der "Einführung" noch offene Frage aus Kapitel III konnte W. M. Schmidt 1968 erledigen, als er die Existenz von T-Zahlen zeigte.

In Kapitel IV geht es um quantitative Transzendenzfragen, also um Transzendenz- bzw. Approximationsmaße, die durch Verfeinerung entsprechender analytischer Transzendenzmethoden, vor allem der Gel'fondschen, gewonnen werden. Auf diese quantitative Problematik als zukünftige Aufgabe weist Schneider in seinem Problem 5 ebenso ausdrücklich hin wie am Ende von Kapitel IV, wo er schreibt: "Die Frage nach möglichst guten Transzendenzmaßen gegebener Zahlen sollte trotz der dabei auftretenden Schwierigkeiten weiter verfolgt werden, da hiervon die Feststellung der Transzendenz anderer Zahlen oder auch die Entscheidung der algebraischen Unabhängigkeit transzendenter Zahlen abhängen kann."

Tatsächlich wurde in der Zwischenzeit die Suche nach immer besseren Maßen von vielen Autoren und oft mit großem Aufwand betrieben, wobei sich dann tatsächlich Anwendungen z.B. auf algebraische Unabhängigkeit und auf diophantische Gleichungen ergaben. So konnte G. V. Chudnovsky 1975 unter Verwendung eines sehr guten Maßes für π zeigen, daß diese Zahl sowohl von $\Gamma(\frac{1}{4})$ als auch von $\Gamma(\frac{1}{3})$ algebraisch unabhängig ist.

In Kapitel V stellt Schneider die Siegelsche Methode für die algebraische Unabhängigkeit der Werte sogenannter E-Funktionen an algebraischen Argumenstellen dar. Er wendet sie an, um den Satz von Lindemann–Weierstraß ebenso zu zeigen wie die Siegelschen Resultate über die Werte der Besselfunktionen. Diese Methode wurde ab 1954 vor allem von A. B. Shidlovskii und seiner Schule weitgehend ausgebaut. In dessen Monographie "Transcendental Numbers" von 1987 (in russischer Sprache; englische Übersetzung 1989) kann man sich über die gesamte Entwicklung der Methode informieren. Am Ende seines Buches geht Schneider nur kommentierend noch auf Gel'fonds Methode für algebraische Unabhängigkeit von Potenzen aus dem Jahre 1949 ein. Hierüber sagt er, "... die zugehörigen Beweise erfordern einen night unerheblichen Aufwand ... Jedoch erscheint diese Methode durchaus weiter ausbaufähig und insofern von besonderem Interesse."

Zu Beginn der 70er Jahre hat diese Methode eine starke Fortentwicklung erfahren, nicht zuletzt im Ringen um die Lösung der Probleme 7 und 8 von Schneider. In Problem 8 war zu zeigen, daß e^e oder e^{e^2} transzendent ist. 1971 haben unabhängig voneinander W. D. Brownawell und M. Waldschmidt dies aus allgemeineren Ergebnissen abgeleitet, die sie durch weiteren Ausbau der Gel'fondschen Unabhängigkeitsmethode erhalten haben.

Problem 7 ist heute noch "etwa zur Hälfte" offen. Es besagt, daß die Potenzen $\alpha^{\beta_1}, ..., \alpha^{\beta_n}$ bei algebraischen $\alpha, \beta_1, ..., \beta_n$ mit $\alpha \log \alpha \neq 0$ und über $\mathbb{Q}$ linear unabhängigen irrationalen Exponenten $\beta_1, ..., \beta_n$ algebraisch unabhängig sind. Ist γ eine algebraische Zahl eines Grades $d \geqslant 2$, so läßt sich Problem 7 unter obiger Voraussetzung über α äquivalent so formulieren, daß die $d-1$ transzendenten Zahlen

$$\alpha^{\gamma}, \alpha^{\gamma^2}, ..., \alpha^{\gamma^{d-1}} \qquad (**)$$

algebraisch unabhängig sind. In dieser Formulierung findet sich das Problem auch in Gel'fonds weiter oben zitiertem Transzendenzbuch und Gel'fond selbst hat den Fall $d=3$ als Anwendung seiner Unabhängigkeitsmethode 1949 erledigt. Für $d \geqslant 4$ ist das Problem noch offen, aber 1987 konnte G. Diaz zeigen, daß mindestens $[(d+1)/2]$ der Zahlen in (**) algebraisch unabhängig sind.

Wenn wir nun noch ein paar Worte zu Schneiders analytischer Transzendenzmethode sagen wollen, so sollten wir vielleicht zunächst bemerken, daß Schneider selbst auf diese an keiner Stelle seines Buches eingegangen ist, wenngleich sein Problem 1 in diese Richtung zu deuten scheint. Es behauptet implizit die Transzendenz von $\exp(\log \beta \log \gamma / \log \alpha)$ bei algebraischen α, β, γ mit $\alpha\beta\gamma \log \alpha \neq 0$ und irrationalen $\log \beta / \log \alpha$ bzw. $\log \gamma / \log \alpha$.

Schneider selbst und Siegel haben schon Mitte der 30er Jahre mit Schneiders Methode den folgenden "Sechsexponentensatz" bewiesen, aber nicht publiziert: Sind u_1, u_2 bzw. v_1, v_2, v_3 komplexe, jeweils über $\mathbb{Q}$ linear unabhängige Zahlen, so ist mindestens eine der sechs Zahlen $e^{u_j v_k}$ transzendent. Könnte man hier das v_3 weglassen und so zu einem Vierexponentensatz gelangen, so würde dieser die Lösung von Schneiders Problem 1 umfassen. Ein wichtiger Schritt in diese Richtung gelang Waldschmidt 1986 mit einem Resultat, das man als Fünfexponentensatz bezeichnen könnte.

Um eine Axiomatisierung von Schneiders Methode haben sich vor allem S. Lang (1966), K. Ramachandra (1968), und M. Waldschmidt (1974) bemüht. In allen Fällen ergibt sich neben dem Satz von Gel'fond–Schneider auch der Sechsexponentensatz aus diesen Axiomatisierungen.

Der Satz von Gel'fond–Schneider kann übrigens äquivalent so formuliert werden: Sind α_1, α_2 algebraisch und nicht Null, so sind $\log \alpha_1, \log \alpha_2$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig genau dann, wenn sie über dem Körper $\bar{\mathbb{Q}}$ aller algebraischen Zahlen linear unabhängig sind. Mit seiner mehrdimensionalen Verallgemeinerung der Gel'fondschen Transzendenzmethode hat A. Baker 1966 dies Resultat wie folgt ausgedehnt: Sind $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \bar{\mathbb{Q}}^{\times}$, so sind $\log \alpha_1, ..., \log \alpha_n$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig genau dann, wenn sie, zusammen mit 1, über $\bar{\mathbb{Q}}$ linear unabhängig sind. Resultate in dieser Richtung konnten in letzter Zeit auch mit der auf mehrere Variablen ausgedehnten Schneiderschen Methode gewonnen werden.

Für die Anwendungen von Bakers Theorie ist aber nicht so sehr die rein qualitative Aussage des Nichtverschwindens von Linearformen des Typs $\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n$ bei nicht sämtlich verschwindenden $\beta_0, ..., \beta_n \in \bar{\mathbb{Q}}$ von Interesse. Vielmehr benötigt man z.B. für Klassenzahlprobleme oder für die effektive Lösung gewisser diophantischer Gleichungen untere Schranken für die Beträge dieser Linearformen, die explizit von den Graden und Höhen der algebraischen α_j, β_k abhängen. Dies alles liefert die Gel'fond–Bakersche Methode und man bemüht sich derzeit, auch die Schneidersche Methode in dieser Richtung auszubauen.

Bei einem Problem ganz anderer Art hat Schneiders Methode bisher das beste Resultat geliefert. D. H. Lehmer fragte 1933, ob es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ eine ganze algebraische Zahl α gibt mit $1 < M(\alpha) < 1 + \varepsilon$, wobei $M(\alpha)$ das Produkt $\Pi_{\delta=1}^{d} \max(1, |\alpha_\delta|)$ bedeutet, d den Grad von α und $\alpha_1, ..., \alpha_d$ die sämtlichen Konjugierten von α. Die Antwort hierauf steht noch aus. Mit Schneiders Methode konnte E. Dobrowolski 1978 wenigstens eine Konstante $c \in \mathbb{R}_+$ effektiv angeben, so daß für alle ganzen algebraischen $\alpha \neq 0$ eines Grades $d \geqslant 2$, die nicht Einheitswurzel sind, die Ungleichung

$$M(\alpha) > 1 + c\left(\frac{\log \log d}{\log d}\right)^3$$

gilt.

Es konnten hier keineswegs alle Fragestellungen genannt werden, bei denen Schneiders Methode bisher weitergeführt hat, und ihre Anzahl wird in Zukunft sicher noch wachsen.

Seit Erscheinen von Schneiders Monographie ist zwar eine ganze Reine neuerer und modernerer Darstellungen von jeweils ausgewählten Teilgebieten der Transendenztheorie publiziert worden. Dennoch hat sein Buch drei Jahrzehnte lang die Weiterentwicklung dieses schönen Gebiets stimuliert und ihm zahlreiche neue Freunde zugeführt.

Schriftenverzelchnis von Theodor Schneider

Zusammengestellt nach Mathematical Reviews und Zentralblatt

1. Theodor Schneider, Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. I. Transzendenz von Potenzen, *J. Reine Angew. Math.* **172** (1934), 65–69.
2. Theodor Schneider, Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. II. Transzendenzeigenschaften elliptischer Funktionen, *J. Reine Angew. Math.* **172** (1934), 70–74.
3. Theodor Schneider, Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale, *Math. Ann.* **113** (1936), 1–13.
4. Theodor Schneider, Zur Approximation algebraischer Zahlen (Vershärfung eines Satzes von C. L. Siegel), *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **46** (1936), 62.
5. Theodor Schneider, Über die Approximation algebraischer Zahlen, *J. Reine Angew. Math.* **175** (1936), 182–192.
6. Theodor Schneider, Zur Theorie der Abelschen Funktionen und Integrale, *J. Reine Angew. Math.* **183** (1941), 110–128.
7. Theodor Schneider, Über eine Dysonsche Verschärfung des Siegel–Thueschen Satzes, *Arch. Math.* **1** (1949), 288–295.

8. THEODOR SCHNEIDER, Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise. *Math. Ann.* **121** (1949), 131–140.
9. THEODOR SCHNEIDER, Über einen Hlawkaschen Satz aus der Geometrie der Zahlen, *Arch. Math.* **2** (1950), 81–86.
10. THEODOR SCHNEIDER, Eine Bemerkung zur Minkowskischen Vermutung über inhomogene Linearformen, *Arch. Math.* **2** (1950), 87–89.
11. THEODOR SCHNEIDER, Über einen Blichfeldtschen Satz aus der Geometrie der Zahlen, *Arch. Math.* **2** (1950), 349–353.
12. THEODOR SCHNEIDER, Zum Beweis der Transzendenz von e und π. *Math.-Phys. Semesterber.* **1** (1950), 299–303.
13. THEODOR SCHNEIDER, Zur Annäherung der algebraischen Zahlen durch rationale, *J. Reine Angew. Math.* **188** (1950), 115–128.
14. THEODOR SCHNEIDER, Verallgemeinerung einer Minkowskischen Ungleichung über konvexe Körper mit Mittelpunkt, *Math. Ann.* **122** (1950), 35–36.
15. THEODOR SCHNEIDER, Zur Charakterisierung der algebraischen und der rationalen Funktionen durch ihre Funktionswerte, *Acta Math.* **86** (1951), 57–70.
16. THEODOR SCHNEIDER, Zur Charakterisierung algebraischer Funktionen mit Hilfe des Eisensteinschen Satzes, *Math. Z.* **60** (1954), 98–108.
17. THEODOR SCHNEIDER, Arithmetische Bedingungen für algebraische Funktionen. Abstract from the "Proceedings of the International Mathematical Congress Amsterdam, Sept. 1954."
18. THEODOR SCHNEIDER, Über die Irrationalität von π, *S.-B. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss.* **1954** (1955), 99–101.
19. THEODOR SCHNEIDER, "Einführung in die transzendenten Zahlen." Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1957.
20. THEODOR SCHNEIDER, "Introduction aux nombres transcendants" (Traduit de l'allemand par P. Eymard), Paris, 1959.
21. THEODOR SCHNEIDER, Anwendung eines abgeänderten Roth–Ridoutschen Satzes auf diophantische Gleichungen, *Math. Ann.* **169** (1967), 177–182.
22. THEODOR SCHNEIDER, Über p-adische Kettenbrüche, "Symposia Mathematica, Vol. IV (INDAM, Rome 1968/69)," pp. 181–189, 1970.
23. THEODOR SCHNEIDER, Über rationale Stellen, an denen eine algebraische Funktion rationale Werte annimmt, *in* "Zahlentheorie (Tagung Oberwolfach 1970)," pp. 137–145, Mannheim, 1971.
24. THEODOR SCHNEIDER, Rationale Punkte über einer algebraischen Kurve, *in* "Séminaire Delange–Pisot–Poitou, Théorie des Nombres, 15e anné, Exp. No. 20, 7 pp, Paris 1975."
25. THEODOR SCHNEIDER, Eine Bemerkung zu einem Satz von C. L. Siegel, *Comm. Pure Appl. Math.* **29** (1976), 775–782.

26. THEODOR SCHNEIDER, 5. Zahlentheorie, *in* "Gesammelte Schriften von Gustav Herglotz," pp. xxxii–xxxvii, Göttingen, 1979.
27. THEODOR SCHNEIDER, Das Werk C. L. Siegels in der Zahlentheorie, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **85** (1983), 147–157.

LISTE VON PROMOVENDEN BEI THEODOR SCHNEIDER

ALFRED GÜNTHER, "Über transzendente p-adische Zahlen," Göttingen, 1952.

ORHAN S. IÇEN, "Eine Verallgemeinerung und Übertragung der Schneider'schen Algebraizitätskriterien ins p-adische mit Anwendung auf einen Transzendenzbeweis im p-adischen," Göttingen, 1955.

WOLFGANG SCHWARZ, "Zur Darstellung von Zahlen als Summen von Primzahlpotenzen," Erlangen, 1959.

LUISE-CHARLOTTE MENGER (später Kappe), "Eine direkte Methode bei Transzendenzuntersuchungen, Freiburg i.Br., 1962.

GERHARD AUGUSTIN, "Über zwei p-adische Approximationsmaße von Werten der Exponentialfunktion," Freiburg i.Br., 1965.

ROLF WALLISSER, "Verallgemeinerte ganze ganzwertige Funktionen und verwandte Probleme," Freiburg i.Br., 1965.

PETER BUNDSCHUH, "Über die Approximation transzendenter Zahlen, die Werte von Umkehrfunktionen gewisser meromorpher Funktionen sind," Freiburg i.Br., 1967.

HANS PETER SCHLICKEWEI, "Approximation algebraischer Zahlen durch rationale Zahlen," Freiburg i.Br., 1975.

GISBERT WÜSTHOLZ, "Simultane Approximationen," Freiburg i.Br., 1976.